## Θέμα Α

Α1 –γ , Α2 – α , Α3 – γ , Α4 – β , Α5 α – Σ, β – Λ , γ – Λ , δ – Λ , ε – Λ

## Θέμα Β

**Β1. Σωστή απάντηση είναι η (β).**

Σε μια περίοδο της κίνησης $T$ η απομάκρυνση της σύνθετης κίνησης μηδενίζεται δύο φορές. Στο χρονικό διάστημα $\Delta t = T_\delta$ η απομάκρυνση μηδενίζεται 200 φορές. Άρα $\dfrac{T}{T_\delta} = \dfrac{2}{200} \Rightarrow \dfrac{T}{T_\delta} = \dfrac{1}{100}$

όπου $T = \dfrac{2\pi}{\bar{\omega}} = \dfrac{2\pi}{2\pi \dfrac{f_1 + f_2}{2}} = \dfrac{2}{f_1 + f_2}$ και $\Delta t = T_\delta = \dfrac{1}{f_1 - f_2}$

οπότε $\dfrac{T}{T_\delta} = \dfrac{1}{100} \Rightarrow \dfrac{\dfrac{2}{f_1 + f_2}}{\dfrac{1}{f_1 - f_2}} = \dfrac{1}{100} \Rightarrow \dfrac{2(f_1 - f_2)}{f_1 + f_2} = \dfrac{1}{100} \Rightarrow 200 f_1 - 200 f_2 = f_1 + f_2 \Rightarrow$

$199 f_1 = 201 f_2 \Rightarrow \dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{201}{199}$

**Β2. Α. Σωστή απάντηση είναι η (β).**

Από το διάγραμμα της φάσης του κύματος τη χρονική στιγμή $t = 4s$ η φάση της αρχής στη θέση $x = 0$ είναι μεγαλύτερη από τα σημεία του αρνητικού ημιάξονα και μικρότερη από τα σημεία του θετικού ημιάξονα. Τα σημεία που έχουν μεγαλύτερη φάση ταλαντώνονται για περισσότερο χρόνο, άρα το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση.

**Β. Σωστή απάντηση είναι η (γ).**

Για τη φάση της αρχής $x = 0$ έχουμε τη χρονική στιγμή $t = 4s$: $\Phi = \dfrac{2\pi t}{T} \Rightarrow 20\pi = \dfrac{2\pi \cdot 4}{T} \Rightarrow T = 0{,}4s$

Επίσης για την αρχή $x = 0$ και το σημείο στη θέση $x = -0{,}8m$ ισχύει για τη διαφορά φάσης τους:

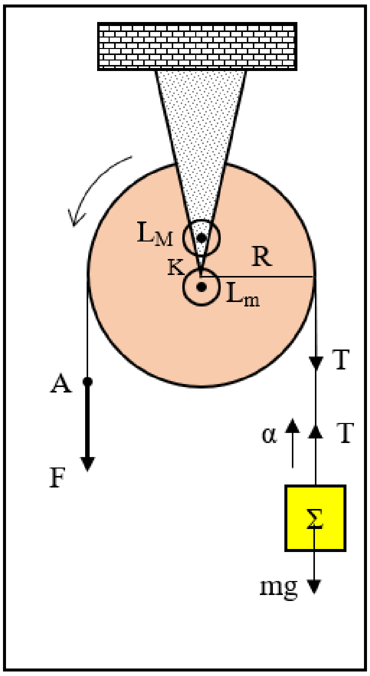
$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \Rightarrow 0 - 20\pi = \frac{2\pi}{\lambda}(-8 - 0) \Rightarrow \lambda = 0{,}8m$$

Άρα η ταχύτητα διάδοσης είναι: $\upsilon = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{0{,}8}{0{,}4}\dfrac{m}{s} \Rightarrow \upsilon = 2\dfrac{m}{s}$

**Β3. Σωστή απάντηση είναι η (α).**

Όταν ο κύλινδρος ψυχθεί η ακτίνα του μειώνεται κατά $x \cdot R$ μειώνεται και η ροπή αδράνειας στην τιμή $I' = \dfrac{1}{2}m(R - x \cdot R)^2 = \dfrac{1}{2}mR^2(1 - x)^2 \Rightarrow I' = I(1 - x)^2$. Στον κύλινδρο δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές οπότε ισχύει η ΑΔΣ: $\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow I\omega = I'\omega' \Rightarrow I\omega = I(1 - x)^2\omega' \Rightarrow \omega' = \dfrac{\omega}{(1 - x)^2}$

## Θέμα Γ




**Γ1.** Από τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας έχουμε:

$$\frac{dL_M}{dt} = I \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \frac{dL_M}{dt} = \frac{1}{2}MR^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

Η ταχύτητα του σώματος είναι κατά μέτρο ίση με τη γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας οπότε ισχύει:

$$\upsilon = \upsilon_{\gamma\rho} = R\omega \rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon_{\gamma\rho}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a = a_{\varepsilon(R)} = R \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$2{,}5 = \frac{1}{2}2\frac{1}{4}a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 10\frac{rad}{s^2}$$

$$a = \frac{1}{2}10\frac{m}{s^2} \Rightarrow a = 5\frac{m}{s^2}$$

**Γ2.** Για το σώμα ΘΝΜ: $\Sigma F = ma \Rightarrow T - mg = ma \;\; (1)$

Για την τροχαλία ΘΝΣ:

$$\Sigma\tau = Ia_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow FR - TR = \frac{1}{2}MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F - T = \frac{1}{2}MRa_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$F - T = \frac{1}{2}Ma\,(2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow F - T + T - mg = \frac{1}{2}Ma + ma \Rightarrow F - mg = \left(\frac{1}{2}M + m\right)a \Rightarrow F = 20N$$

**Γ3.** Τη χρονική στιγμή $t = 2s$ η ταχύτητα του σώματος είναι $\upsilon = at = 10\frac{m}{s}$ και η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας είναι $\omega = a_{\gamma\omega\nu}t = 20\frac{rad}{s}$. Η στροφορμή του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας είναι:

$$\vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \vec{L}_M + \vec{L}_m \Rightarrow L_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = L_M + L_m = I\omega + m\upsilon R = \frac{1}{2}MR^2\omega + m\upsilon R \Rightarrow L_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = 10\frac{kg \cdot m^2}{s} \odot$$

**Γ4.** Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος τροχαλία – σώμα Σ ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας είναι: $\frac{dL_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{dt} = \Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = \tau_F - \tau_{mg} = FR - mgR \Rightarrow \frac{dL_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{dt} = 5N \cdot m$

## Θέμα Δ

**Δ1.** Οι επιμέρους ταλαντώσεις έχουν διαφορά φάσης $\Delta\Phi = \omega t + \pi - \omega t \Rightarrow \Delta\Phi = \pi\, rad$ .

Για το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης ισχύει: $A = |A_1 - A_2| \Rightarrow A = 0{,}2m$

Η αρχική φάση της σύνθετης ταλάντωσης θα είναι ίση με τη φάση της ταλάντωσης που έχει το μεγαλύτερο πλάτος, δηλαδή $\varphi_0 = \varphi_{01} = 0$.

Από το μέγιστο μέτρο επιτάχυνσης ενός σημείου της χορδής που ταλαντώνεται έχουμε:

$$a_{max} = \omega^2 A \Rightarrow 5\pi^2 = \omega^2 \cdot 0{,}2 \Rightarrow \omega^2 = 25\pi^2 \Rightarrow \omega = 5\pi \frac{rad}{s} \to T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}4s \to f = \frac{1}{T} = 2{,}5Hz .$$

Άρα η εξίσωση απομάκρυνσης ταλάντωσης που εκτελεί το άκρο $O$ της χορδής είναι $y = A \cdot \eta\mu(\omega t) \Rightarrow y = 0{,}2 \cdot \eta\mu(5\pi t)\ S.I.$

**Δ2.** Το μήκος κύματος του νήματος είναι $\upsilon = \lambda f \Rightarrow \lambda = \dfrac{\upsilon}{f} = \dfrac{2}{2{,}5} m \Rightarrow \lambda = 0{,}8m$.

Η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι: $y = A \cdot \eta\mu\left(\dfrac{2\pi t}{T} - \dfrac{2\pi x}{\lambda}\right) \Rightarrow y = 0{,}2 \cdot \eta\mu(5\pi t - 2{,}5\pi x)\, S.I.$

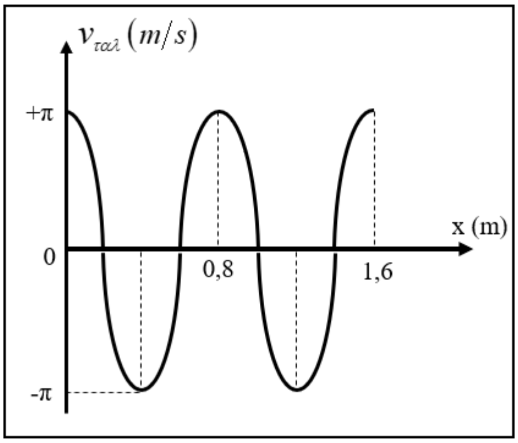
Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης των σημείων της χορδής σε συνάρτηση με τη θέση $x$, $(v_{\tau\alpha\lambda} = f(x))$, τη χρονική στιγμή $t = 0{,}8s$ είναι:

$$v_{\tau\alpha\lambda} = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$v_{\tau\alpha\lambda} = \pi \cdot \sigma\upsilon\nu(4\pi - 2{,}5\pi x)\, S.I.$$

Για $x = 0 \to v_{\tau\alpha\lambda} = +\pi \dfrac{m}{s}$

Για $\Phi = 0 \to x = 1{,}6m$




**Δ3.** Από τη μεταβολή της φάσης του υλικού σημείου της χορδής $0{,}3s$ μετά την έναρξη της ταλάντωσής του προκύπτει:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{T}\Delta t_{\tau\alpha\lambda} \Rightarrow \Phi - \Phi_{\acute{\alpha}\varphi\iota\xi\eta\varsigma} = 5\pi \cdot 0{,}3 rad \Rightarrow \Phi - 0 = \frac{3\pi}{2} rad \Rightarrow \Phi = \frac{3\pi}{2} rad$$

Άρα η απομάκρυνση ταλάντωσης του σημείου είναι: $y = A \cdot \eta\mu\Phi = 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -0{,}2m$

**Δ4.** Η εύρεση των σημείων θα γίνει λύνοντας την τριγωνομετρική εξίσωση $v_{\tau\alpha\lambda} = +0{,}5\pi \dfrac{m}{s}$ τη χρονική στιγμή $t = 0{,}8s$, δηλαδή

$$v_{\tau\alpha\lambda} = \pi \cdot \sigma\upsilon\nu(5\pi t - 2{,}5\pi x) \Rightarrow +0{,}5\pi \frac{m}{s} = \pi \cdot \sigma\upsilon\nu(5\pi \cdot 0{,}8 - 2{,}5\pi x) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(4\pi - 2{,}5\pi x) = +\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu(4\pi - 2{,}5\pi x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 4\pi - 2{,}5\pi x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{22 - 12\kappa}{15} & (1) \\ x = \dfrac{26 - 12\kappa}{15} & (2) \end{cases}$$

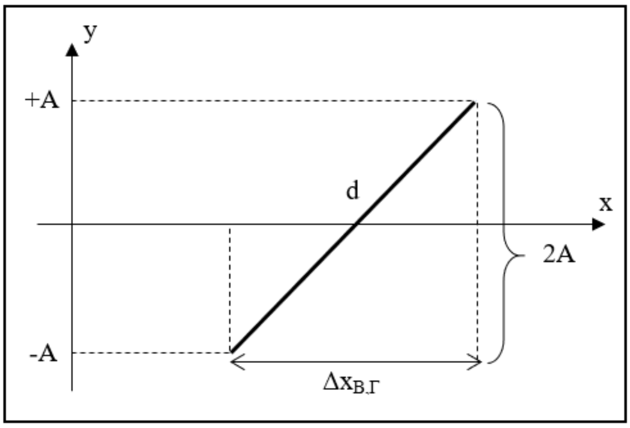
Το κύμα τη χρονική στιγμή $t = 0{,}8s$ έχει φτάσει στη θέση για τη οποία $\Phi = 0 \to x_{\tau\varepsilon\lambda} = 1{,}6m = \dfrac{24}{15} m$

Άρα τα ζητούμενα σημεία βρίσκονται $0 \le x \le x_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow 0 \le x \le \frac{24}{15} m$

Από $(1)$ για $\kappa = 0 \rightarrow x = \frac{22}{15} m,\ \kappa = 1 \rightarrow x = \frac{10}{15} m$

Από $(2)$ για $\kappa = 0 \rightarrow x = \frac{26}{15} m\ (\alpha\pi o\rho),\ \kappa = 1 \rightarrow x = \frac{14}{15} m,\ \kappa = 2 \rightarrow x = \frac{2}{15} m$

**Δ5.** Τα σημεία Β και Γ της χορδής απέχουν μεταξύ τους οριζόντια απόσταση $\Delta x_{\mathrm{B,\Gamma}} = 1{,}2 m$ και έχουν διαφορά φάσης $\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x_{\mathrm{B,\Gamma}} \Rightarrow \Delta\Phi = \frac{2\pi}{0{,}8}1{,}2 \Rightarrow \Delta\Phi = 3\pi\, rad$ άρα κάθε στιγμή έχουν αντίθετες απομακρύνσεις και αντίθετες ταχύτητες (αντίθεση φάσης). Η μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν τα σημεία είναι όταν βρίσκονται στις ακραίες θέσεις τους. Όπως φαίνεται από το σχήμα έχουμε:




$$d = \sqrt{(\Delta x_{\mathrm{B,\Gamma}})^2 + (2\mathrm{A})^2} = \sqrt{1{,}44 + 0{,}16}\, m \Rightarrow d = \sqrt{1{,}6}\, m$$